**Exercice 1**

Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} un cercle et une droite disjoints. Déterminer l'ensemble des centres des cercles tangents à la fois à \mathcal{C} et \mathcal{D} .

Exercice 2

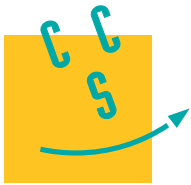
Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n et A sa matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n . On suppose que λ est une valeur propre non réelle de A et que $Z \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé.

On note X et Y les vecteurs de \mathbb{R}^n dont les composantes sont respectivement les parties réelles et imaginaires des composantes de Z .

1. Montrer que X et Y sont non colinéaires.
2. Montrer que $\text{vect}(X, Y)$ est stable par f .
3. On suppose que la matrice de f est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer tous les plans stables par f .

**Exercice 1**

Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}.$$

Exercice 2

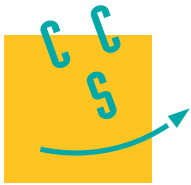
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

1. Donner un exemple d'endomorphisme f de E dont l'image et le noyau ne sont pas supplémentaires.
2. On suppose, dans cette question seulement, que f est un endomorphisme de E diagonalisable. Justifier que l'image et le noyau de f sont supplémentaires.
3. Soit f un endomorphisme de E . Montrer qu'il existe un entier naturel non nul k tel que

$$\text{Im}(f^k) \oplus \text{Ker}(f^k) = E$$

L'endomorphisme f^k est-il nécessairement diagonalisable ?

4. Le résultat démontré en 3 reste-t-il valable si l'espace E est de dimension infinie ?



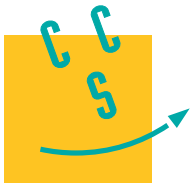
L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

- Déterminer les matrices dans la base canonique de
 - la rotation d'axe orienté par $\vec{i} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$;
 - la réflexion par rapport au plan $F : x + 2y + z = 0$.
- Déterminer des réels α, a, b, c et d tels que $A = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & a & c \\ -1 & b & d \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation.

En préciser les éléments caractéristiques.

- Soit r une rotation d'axe orienté $\text{Vect}(a)$ avec $\|a\| = 1$ et d'angle θ et soit $x \in E$. On note (u, v) l'unique couple de $\text{Vect}(a) \times \text{Vect}(a)^\perp$ tel que $x = u + v$.
 - Préciser (u, v) en fonction de x puis déterminer $r(u)$.
 - Déterminer une expression simple de $r(v)$ en fonction de v et $a \wedge v$.

(On pourra remarquer que $(a, v, a \wedge v)$ est une famille orthogonale.)
 - En déduire que $r(x) = (1 - \cos \theta)\langle x, a \rangle a + \cos \theta x + \sin \theta(a \wedge x)$.
- En utilisant le résultat précédent, retrouver la matrice de la rotation d'axe $\vec{i} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$.
- Soit le système différentiel $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Montrer qu'il existe une application $t \mapsto B(t)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on déterminera telle que $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = B(t)X(0)$.
 - Décrire l'endomorphisme canoniquement associé à $B(t)$ pour t réel fixé.

**Exercice 1**

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note

$$u_{n,p} = \frac{1}{p^n} \left(\sum_{k=1}^p \left(1 + \frac{k}{p} \right)^{1/n} \right)^n$$

Déterminer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,p} \right)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p} \right)$.

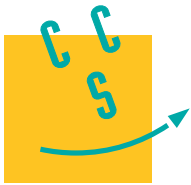
Exercice 2

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On note E l'ensemble de fonctions définies sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . On définit l'application Φ de E dans \mathbb{R}_+ par

$$\forall f \in E, \quad \Phi(f) = \int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt$$

Déterminer (s'ils existent) les réels $m = \inf_{f \in E} \Phi(f)$ et $M = \sup_{f \in E} \Phi(f)$.

Précisez éventuellement pour quelles fonctions ces valeurs sont atteintes.



Dans cet exercice, on se place dans l'espace affine euclidien \mathbb{R}^3 rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit P le plan d'équation $x + y - 2z - 1 = 0$. Déterminer la distance d'un point $M(x, y, z)$ à P , notée $d(M, P)$.

2. Soit D la droite passant par le point $A(1, 1, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Représenter simultanément à l'écran la droite D et le plan P . Sont-ils parallèles ?

Calculer la distance d'un point $M(x, y, z)$ à D , notée $d(M, D)$.

3. On définit

$$\Sigma = \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad d(M, D)^2 + d(M, P)^2 = 5\}$$

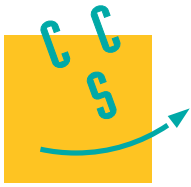
Déterminer une équation cartésienne de Σ .

Représenter simultanément Σ , D et P à l'écran.

Que peut-on conjecturer quant à la nature de Σ ?

4. Réduire l'équation cartésienne obtenue pour Σ dans un repère orthonormal approprié et en déduire sa nature.

5. Calculer le volume du domaine intérieur à Σ .



1. Soit $(t, x) \mapsto h(t, x)$ une application de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$H(x) = \int_0^x h(t, x) dt$$

En utilisant le logiciel informatique exprimer la dérivée $H'(x)$ à l'aide de l'application h .

On admettra provisoirement que $H'(x)$ existe pour tout x réel ainsi que la formule trouvée.

2. On veut déterminer l'ensemble des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et de classe C^1 qui vérifient le système d'équations suivant :

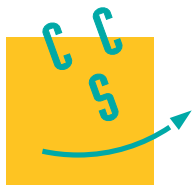
$$(S) \begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + 8 \int_0^x \cos(x-t)f(t)dt = 9 \end{cases}$$

- a. Montrer qu'une application f de classe C^1 et qui vérifie le système d'équations (S) est forcément de classe C^∞ .
- b. Montrer qu'il existe des fonctions f_1, f_2, f_3 à déterminer explicitement et des constantes A, B, F telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait nécessairement

$$f(x) = Af_1(x) + Bf_2(x) + f_3(x) + F$$

- c. Déterminer toutes les solutions du problème considéré.

3. Démontrer le résultat trouvé à la première question.



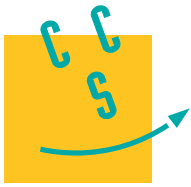
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -23 & 10 & 3 & -11 \\ 314 & -126 & -39 & 139 \\ -426 & 174 & 56 & -187 \\ 225 & -92 & -29 & 100 \end{pmatrix}$$

et u l'endomorphisme canoniquement associé de \mathbb{R}^4 .

Avant toute chose, afin de corriger une éventuelle faute de frappe, vérifier que $u(1, 2, 3, 4) = (-38, 501, -658, 354)$.

- Déterminer le polynôme caractéristique P de u , ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?
- On pose $v_1 = (-8, 103, -139, 73)$, $v_2 = u(v_1)$ et $v_3 = u(v_2)$.
 - Montrer que (v_1, v_2, v_3) est liée et déterminer une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.
 - On pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$. Montrer que F est un plan stable par u dont $B = (v_1, v_2)$ est une base.
 - Déterminer la matrice C dans la base B de l'endomorphisme u_F induit par u sur F .
 - Déterminer le polynôme caractéristique P_F de u_F , ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?
 - Comparer P_F et P .
- On pose $w_1 = (2, -13, 17, -9)$, $w_2 = u(w_1)$, $w_3 = u(w_2)$ et $w_4 = u(w_3)$.
 - Montrer que (w_1, w_2, w_3, w_4) est liée et déterminer une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.
 - On pose $G = \text{Vect}(w_1, w_2, w_3)$. Montrer que G est stable par u et que $B' = (w_1, w_2, w_3)$ en est une base.
 - Déterminer la matrice C' dans la base B' de l'endomorphisme u_G induit par u sur G .
 - Déterminer le polynôme caractéristique P_G de u_G , ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?
 - Comparer P_G et P .
- Peut-on trouver un plan de \mathbb{R}^4 stable par u sur lequel le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit est $(X - 2)^2$?



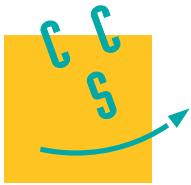
L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

- Déterminer les matrices dans la base canonique de
 - la rotation d'axe orienté par $\vec{i} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$;
 - la réflexion par rapport au plan $F : x + 2y + z = 0$.
- Déterminer des réels α, a, b, c et d tels que $A = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & a & c \\ -1 & b & d \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation.

En préciser les éléments caractéristiques.

- Soit r une rotation d'axe orienté $\text{Vect}(a)$ avec $\|a\| = 1$ et d'angle θ et soit $x \in E$. On note (u, v) l'unique couple de $\text{Vect}(a) \times \text{Vect}(a)^\perp$ tel que $x = u + v$.
 - Préciser (u, v) en fonction de x puis déterminer $r(u)$.
 - Déterminer une expression simple de $r(v)$ en fonction de v et $a \wedge v$.

(On pourra remarquer que $(a, v, a \wedge v)$ est une famille orthogonale.)
 - En déduire que $r(x) = (1 - \cos \theta)\langle x, a \rangle a + \cos \theta x + \sin \theta(a \wedge x)$.
- En utilisant le résultat précédent, retrouver la matrice de la rotation d'axe $\vec{i} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$.
- Soit le système différentiel $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Montrer qu'il existe une application $t \mapsto B(t)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on déterminera telle que $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = B(t)X(0)$.
 - Décrire l'endomorphisme canoniquement associé à $B(t)$ pour t réel fixé.



On pose pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = \sqrt{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $f_N(x) = \sqrt{1-x} \sum_{n=1}^N x^{n^2}$.

1. Vérifier que f est correctement définie.
2. Représenter simultanément les fonctions f_N pour $N \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

Quelle conjecture peut-on en déduire ?

3. Calculer les valeurs approchées des maximums des fonctions f_N pour $N \in \{2, 4, \dots, 40\}$.

On justifiera la monotonie de cette suite.

4. On note $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Donner la valeur de $A_N = \sum_{n=0}^N a_n$.

5. Soit g une fonction développable en série entière de rayon égal à 1.

On note $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \geq 0$. On note $C_N = \sum_{n=1}^N c_n$.

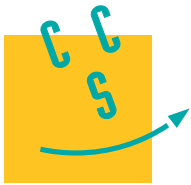
Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$.

On note $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Quelle est la valeur de $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$?

6. Calculer la limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N}{B_N}$.

La comparer aux valeurs trouvées à la **question 3**.

7. Montrer la conjecture de la **question 2**.



Dans cet exercice, on se place dans l'espace affine euclidien \mathbb{R}^3 rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit P le plan d'équation $x + y - 2z - 1 = 0$. Déterminer la distance d'un point $M(x, y, z)$ à P , notée $d(M, P)$.

2. Soit D la droite passant par le point $A(1, 1, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Représenter simultanément à l'écran la droite D et le plan P . Sont-ils parallèles ?

Calculer la distance d'un point $M(x, y, z)$ à D , notée $d(M, D)$.

3. On définit

$$\Sigma = \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad d(M, D)^2 + d(M, P)^2 = 5\}$$

Déterminer une équation cartésienne de Σ .

Représenter simultanément Σ , D et P à l'écran.

Que peut-on conjecturer quant à la nature de Σ ?

4. Réduire l'équation cartésienne obtenue pour Σ dans un repère orthonormal approprié et en déduire sa nature.

5. Calculer le volume du domaine intérieur à Σ .